

Forçage stochastique du tourbillon de Lamb-Oseen

Jérôme Fontane, Pierre Brancher & David Fabre

Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT)
2 Allée du Professeur Camille Soula, 31400 Toulouse, France
jerome.fontane@imft.fr

Résumé :

On analyse la dynamique du tourbillon de Lamb-Oseen soumis à un forçage stochastique continu susceptible de représenter toute perturbation extérieure comme la variation des conditions atmosphériques ou la turbulence issue des ailes de l'avion. Cette démarche permet de retrouver l'existence de mécanismes de croissances transitoires identifiées par Antkowiak & Brancher (2004, 2007). Dans le cas axisymétrique, des anneaux de vorticité apparaissent à la périphérie du tourbillon via un mécanisme d'"anti-lift-up". Dans les autres cas, la réponse du tourbillon aux temps longs laisse émerger une structure principale excitée par des feuillets de vorticité enroulés en spirale. Cette réponse correspond le plus souvent à une onde de Kelvin. Dans le cas d'une perturbation hélicoïdale, cette analyse permet de proposer un possible mécanisme responsable du "vortex meandering" rencontré par les expérimentateurs.

Abstract :

We analyse the dynamics of the Lamb-Oseen vortex when continuously excited by a stochastic forcing. This maintained forcing can thus model any perturbation such as variations of atmospheric conditions or turbulence generated by aircraft wings. The mechanisms of transient growth identified by Antkowiak & Brancher (2004, 2007) are retrieved thanks to this approach. In the axisymmetric case, vortex rings appear at the vortex outskirts via an "anti-lift-up" mechanism. For the other azimuthal wavenumbers, the distribution that emerges at large times is a structure which has been excited by left-handed spiraling vorticity sheets. This response corresponds most often to a Kelvin wave. In the helical case, this analysis enables to propose a good candidate for the vortex meandering phenomenon evidenced by experimentalists.

Mots-clefs :

croissance transitoire ; Lamb-Oseen ; forçage stochastique

1 Introduction

Le besoin d'une meilleure compréhension de la dynamique tourbillonnaire est en particulier motivé par le désir de diminuer l'intensité des tourbillons de sillage des avions pour en réduire les dangers inhérents et accroître les cadences de décollage/att rissage dans les aéroports. Le tourbillon de Lamb-Oseen est un modèle simple mais suffisamment réaliste pour que l'étude de sa dynamique transitoire présente un intérêt. Il est connu pour être asymptotiquement stable et ne pas présenter de mécanisme classique de transition vers la turbulence via l'apparition d'instabilités (Fabre *et al.*, 2006). Cependant, Antkowiak & Brancher (2004, 2007) ont récemment identifié l'existence de perturbations optimales associées à des croissances transitoires susceptibles de conduire à des transitions "by-pass" vers la turbulence. Cette incapacité de l'analyse modale à décrire compl tement la dynamique linéaire de l'écoulement est liée à la non-normalité de l'opérateur dynamique (Farrell & Ioannou, 1994).

L'objectif de ce travail est de déterminer si ces structures optimales peuvent naturellement survenir à partir de champs de perturbations plus réalistes comme le bruit de fond dans les expériences en soufflerie ou la turbulence générée par les ailes d'un avion. L'approche théorique

consiste à exciter continûment le système de Navier-Stokes avec un champ aléatoire. Un tel forçage est générique et peut rendre compte de toute perturbation présente dans les écoulements réels. Les équations dynamiques peuvent alors être considérées comme un système où le champ stochastique est l'entrée et le champ de vitesse résultant la sortie. Le rapport entre l'énergie de la réponse et celle du terme de forçage donne alors l'amplification du système. Cette démarche a été précédemment appliquée avec succès aux écoulements cisailés (Farrell & Ioannou, 1993) et aux tourbillons 2D avec un écoulement radial issus d'applications géophysiques (Nolan & Farrell, 1999). Ces travaux ont en effet donné des résultats complémentaires en très bon accord avec les études de perturbations optimales associées. La formulation théorique et numérique du problème est présentée dans la première partie. Les résultats de l'étude sont rapportés dans la seconde.

2 Formulation du problème

2.1 Système linéaire piloté par un forçage stochastique

On considère un système dynamique linéaire soumis à un forçage aléatoire continu :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{F}\vec{\xi}. \quad (1)$$

On se place dans le cas d'un système linéaire asymptotiquement stable et non-normal, *i.e.* $\mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} \neq \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger$ où \dagger désigne la transposition Hermitienne. Le terme de forçage $\vec{\xi}$ est défini pour être le plus générique possible. On choisit donc un bruit blanc Gaussien décorrélé avec une moyenne nulle

$$\langle \xi_i \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t'), \quad (2)$$

où $\langle \rangle$ représente l'opérateur de moyenne d'ensemble. Cette forme particulière permet d'exciter indépendamment chaque fonction du forçage identifiées par les colonnes de la matrice \mathcal{F} . La solution de (1) est donnée par

$$\vec{x}(t) = e^{\mathcal{A}t} \vec{x}_0 + \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-s)} \mathcal{F} \vec{\xi} ds. \quad (3)$$

Comme le système est stable, cette solution tend vers un état stationnaire dont l'expression est proportionnelle à $\vec{\xi}$. Il s'agit donc d'une distribution Gaussienne de moyenne nulle. Ses statistiques sont totalement décrites avec le premier moment qui s'écrit après quelques manipulations mathématiques $\langle E(t) \rangle = \langle x_i^*(t) x_i(t) \rangle = \text{trace} [\mathcal{F}^\dagger \mathcal{B}(t) \mathcal{F}]$, où l'opérateur Hermitien $\mathcal{B}(t)$ est

$$\mathcal{B}(t) = \int_0^t e^{\mathcal{A}^\dagger(t-s)} e^{\mathcal{A}(t-s)} ds. \quad (4)$$

On montre (Farrell & Ioannou, 1994) que lorsque $t \rightarrow \infty$, l'opérateur $\mathcal{B}(t)$ possède une limite qui est solution de l'équation de Lyapunov suivante : $\mathcal{A}^\dagger \mathcal{B}_\infty + \mathcal{B}_\infty \mathcal{A} = -I$. A partir de \mathcal{B}_∞ , il est possible de calculer la variance de l'état stationnaire maintenu par le forçage stochastique $\langle E_\infty \rangle = \text{trace} [\mathcal{F}^\dagger \mathcal{B}_\infty \mathcal{F}]$. On peut également montrer que la moyenne d'ensemble de la matrice de corrélation, $\mathcal{C}_{ij}(t) = \langle x_i^*(t) x_j(t) \rangle$, possède une limite quand $t \rightarrow \infty$ qui est aussi solution d'une équation de Lyapunov : $\mathcal{A} \mathcal{C}_\infty + \mathcal{C}_\infty \mathcal{A}^\dagger = -\mathcal{F} \mathcal{F}^\dagger$. Si on considère le cas d'un forçage unitaire, *i.e.* $\mathcal{F} \mathcal{F}^\dagger = I$, la variance s'écrit alors $\langle E_\infty \rangle = \text{trace} [\mathcal{B}_\infty]$. En notant N le rang de la matrice \mathcal{F} , le gain d'énergie vaut

$$G_\infty = \frac{\langle E_\infty \rangle}{\langle E_0 \rangle} = \frac{1}{2N} \text{trace} [\mathcal{B}_\infty] = \frac{1}{2N} \text{trace} [\mathcal{C}_\infty]. \quad (5)$$

Les structures du forçage peuvent être déterminées et classées en fonction de leur contribution à l'excitation du système en calculant les valeurs propres de la matrice \mathcal{B}_∞ , i.e. $\mathcal{B}_\infty y^{(p)} = \beta^{(p)} y^{(p)}$. De même, les structures qui participent à la réponse du système peuvent être ordonnées suivant leur contribution au gain d'énergie via le problème aux valeurs propres $\mathcal{C}_\infty z^{(p)} = \gamma^{(p)} z^{(p)}$.

2.2 Forçage stochastique appliqué aux équations de Navier-Stokes

Pour être en accord avec les travaux d'Antkowiak & Brancher (2004, 2007), l'écoulement de base considéré ici est le tourbillon de Lamb-Oseen dont la vitesse azimutale normalisée s'écrit $V(r) = (1 - e^{-r^2})/r$. Les échelles caractéristiques utilisées sont le rayon de dispersion du tourbillon r_0 et la vitesse angulaire sur l'axe Ω_0 . Le nombre de Reynolds s'écrit alors $Re = \Omega_0 r_0^2 / \nu = \Gamma / (2\pi\nu)$ où Γ est la circulation du tourbillon. Les équations de Navier-Stokes sont classiquement linéarisées en considérant des perturbations infinitésimales sous la forme modale $[\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_z, \hat{p}](r, \theta, z, t) = [u, v, w, p](r, t)e^{im\theta + ikz}$, où m et k sont les nombres d'onde azimutal et axial. Le nombre d'inconnues est réduit aux trois composantes de la vitesse en éliminant la pression avec l'équation de Poisson. Les perturbations sont développées en série de polynômes de Chebychev. Une méthode spectrale de collocation similaire à celle employée par Fabre *et al.* (2006) est utilisée pour la discrétisation du problème. On obtient finalement un système de la forme $d\vec{\phi}/dt = \mathcal{L}\vec{\phi}$, où \mathcal{L} et $\vec{\phi}$ correspondent respectivement à l'opérateur dynamique discret et aux vitesses discrétisées. L'énergie de la perturbation est définie de manière usuelle par

$$E = \frac{1}{2} \int_0^\infty (u^*u + v^*v + w^*w) r dr. \quad (6)$$

Pour être conforme à la formulation du forçage stochastique décrite à la section précédente, les variables discrètes $\vec{\phi}$ doivent être transformées en vitesses généralisées \vec{x} . Ce changement de variable est choisi de manière à avoir une correspondance directe entre la variance du système (1) et l'énergie de la perturbation (6) : $E = \langle \vec{x}^* \vec{x} \rangle = \langle \vec{\phi}^* \mathcal{M} \vec{\phi} \rangle$. A partir de la factorisation de Choleski de la matrice définie positive \mathcal{M} , la relation de passage entre les deux jeux de variables est obtenue : $\vec{x} = \mathcal{M}^{1/2} \vec{\phi}$. L'opérateur dynamique de (1) s'écrit alors $\mathcal{A} = \mathcal{M}^{1/2} \mathcal{L} \mathcal{M}^{-1/2}$.

Les calculs ont été réalisés sous MATLAB avec la bibliothèque DMSuite développée par Weideman & Reddy (2000). La convergence de la procédure numérique dépend du niveau de troncature N et de l'extension radiale du domaine de calcul r_{max} . La sensibilité des résultats à ces deux paramètres a été testée et la convergence des calculs a été obtenue pour $N \in [150, 300]$ et $r_{max} \in [5000, 20000]$ suivant les cas.

3 Résultats

3.1 Perturbations axisymétriques ($m = 0$)

La figure 1.(a) présente l'amplification d'énergie de l'écoulement dans le cas axisymétrique pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds. Les gains significatifs et le maximum d'amplification pour $k \rightarrow 0$ identifiés par Antkowiak & Brancher (2007) sont retrouvés. Il faut tout de même noter que les gains sont ici supérieurs en raison de la contribution cumulée de toutes les perturbations menant à une croissance transitoire, alors qu'une seule est considérée dans l'étude de perturbation optimale. La structure principale extraite du forçage consiste en un empilement de stries de vitesse azimutale représenté à la figure 1.(b). Ces stries de vitesse de signe alterné sont situées dans la zone quasi-potentielle de l'écoulement. Elles induisent un déplacement radial des particules fluides sous l'effet d'une force de Coriolis locale. Ce champ

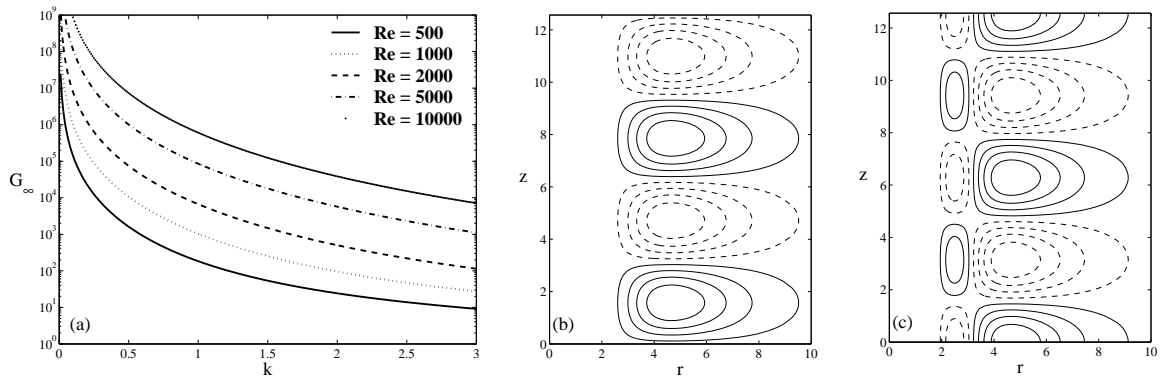


FIG. 1 – (a) Gain d'énergie dans le cas axisymétrique ($m = 0$) en fonction du nombre d'onde axial k pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds. (b) Iso-contours de vitesse azimutale de la structure principale du forçage. (c) Iso-contours de vorticité azimutale de la structure principale de la réponse. Ces structures correspondent à $m = 0$, $Re = 1000$ and $k = 1$. Huit contours espacés régulièrement sont représentés et les pointillés indiquent aux valeurs négatives.

de déplacement peut être décomposé en une partie potentielle et une partie rotationnelle. La première est équilibrée par le champ de pression pour garantir l'incompressibilité de l'écoulement. La seconde alimente la formation d'anneaux de vorticité azimutale qui composent la structure principale issue de la réponse du tourbillon, voir la figure 1.(c). Ce mécanisme physique appelé "anti-lift-up" par Antkowiak & Brancher (2007) est spécifique au cas axisymétrique et serait à l'origine de l'apparition des anneaux de vorticité observés autour des tourbillons colonnes dans un champ turbulent ambiant.

3.2 Perturbations hélicoïdales ($m = 1$)

Les courbes d'amplification d'énergie dans le cas hélicoïdal tracées sur la figure 2.(a) sont en bon accord avec celles d'Antkowiak & Brancher (2004), avec toujours des niveaux supérieurs. Le pic autour de $k = 1.4$ est ici moins prononcé en raison de la compétition des différences structures issues de la réponse du tourbillon. Les figures 2.(c-e) présentent les perturbations dominantes extraites du bruit pour trois valeurs de k à $Re = 1000$. Il s'agit de bras spiralés de vorticité axiale positive et négative situés dans la zone potentielle de l'écoulement. Les vitesses induites dans le coeur du tourbillon par ces couches de vorticité sont initialement nulles en raison de leur entrelacement. Avec le temps, les bras se désenchevêtrent sous l'effet de la rotation différentielle du tourbillon via le mécanisme de Orr. Ils peuvent alors contaminer le coeur du tourbillon par induction et laissent émerger des structures en réponse au forçage, voir figures 2.(f-h). Ces distributions correspondent à des modes de Kelvin étudiés par Fabre *et al.* (2006) comme le montre la comparaison des profils radiaux de vitesse à la figure 2.(b) pour le cas $k = 1.35$. Il s'agit donc d'un genre de résonance entre la perturbation et une onde de Kelvin. Après identification, il s'agit respectivement selon la nomenclature de Fabre *et al.* (2006) du premier mode L1, du second mode L1 et du mode de déplacement D pour $k = 1.35$, $k = 2.5$ et $k = 0.5$. Le mode déplacement possède les caractéristiques du "vortex meandering" (grandes longueurs d'onde axiales et géométrie hélicoïdale). Son émergence fournit une explication physique à ce phénomène : il s'agit de l'excitation du mode D par le bruit de fond présent dans les expériences en soufflerie ou en conditions réelles de vol.

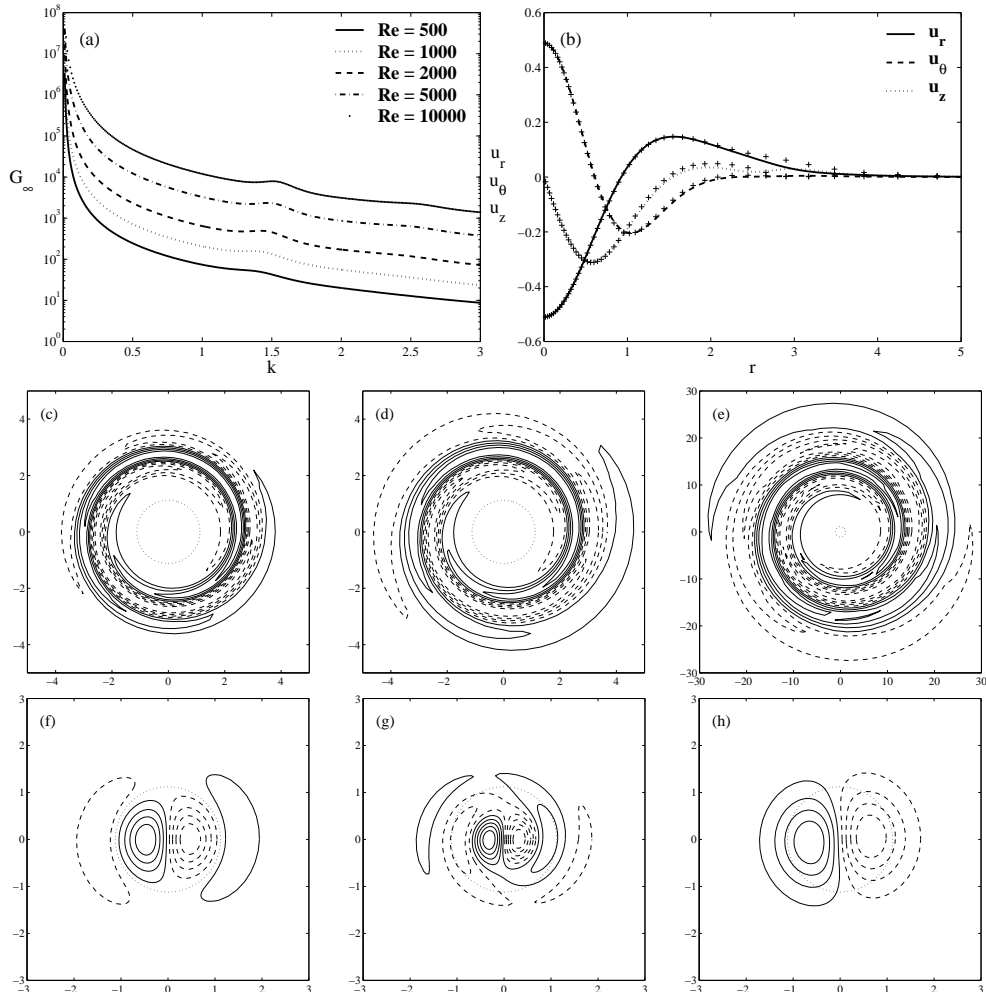


FIG. 2 – (a) Gain d'énergie dans le cas hélicoïdal ($m = 1$) en fonction du nombre d'onde axial k pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds. (b) Comparaison des profils radiaux de vitesse du premier mode L1 de Fabre *et al.* (2006) (lignes) et de la structure principale issue du forçage stochastique (+) pour $k = 1.35$ and $Re = 1000$. Iso-contours de vorticité axiale de la structure principale du forçage à $m = 1$ et $Re = 1000$ pour (c) $k = 1.35$, (d) $k = 2.5$ et (e) $k = 0.5$. Iso-contours de vorticité axiale des structures principales issues de la réponse du tourbillon à $m = 1$ et $Re = 1000$ pour (f) $k = 1.35$, (g) $k = 2.5$ et (h) $k = 0.5$. Le cercle en pointillé correspond à la position du maximum de vitesse azimutale du tourbillon de Lamb-Oseen pour $r = 1.1209r_0$.

3.3 Autres types de perturbations ($m \geq 2$)

Pour des valeurs supérieures du nombre d'onde azimutal, on retrouve également des niveaux d'amplification conséquents mais d'un niveau moins élevé que précédemment dès que $m \geq 3$ (courbes non présentées ici). Dans le cas des perturbations de géométrie $m = 2$, le même mécanisme de résonance entre les bras spiralés et une onde de Kelvin est présent. L'onde F de Fabre *et al.* (2006) est décelée (voir figure 3) mais elle coexiste avec la réponse du tourbillon relevant uniquement du mécanisme de Orr : la structure de la réponse correspondante est constituée de quatre poches de vorticité de signe alterné résultant du désenroulement des nappes de vorticité initialement enchevêtrées de la perturbation (champs non présentés).

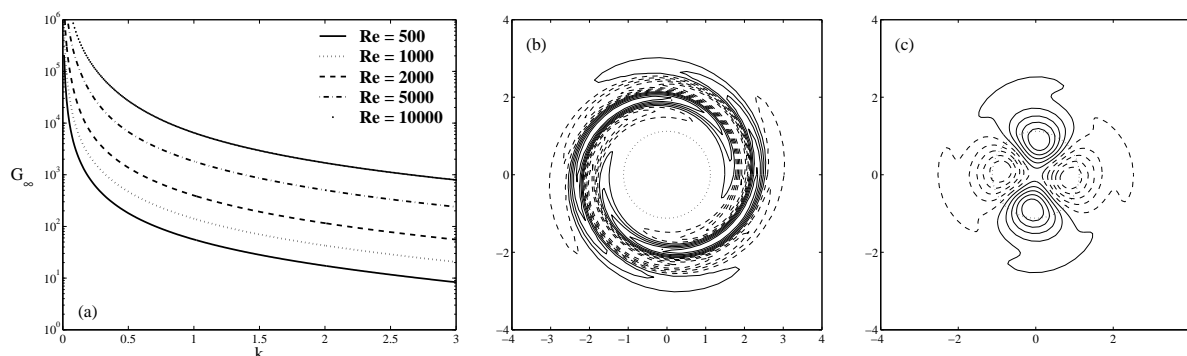


FIG. 3 – (a) Gain d'énergie dans le cas de la double-hélice ($m = 2$) en fonction du nombre d'onde axial k pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds. (b) Iso-contours de vorticité axiale de la structure principale du forçage à $m = 2$, $k = 2.5$ et $Re = 1000$. (c) Iso-contours de vorticité axiale de la structure principale de la réponse à $m = 2$, $k = 2.5$ et $Re = 1000$.

4 Conclusions

Le tourbillon de Lamb-Oseen forcé constamment par un champ de perturbations aléatoires présente des croissances transitoires. L'écoulement peut extraire du bruit ambiant les perturbations optimales de Antkowiak & Brancher (2004, 2007) qui excitent le tourbillon. Dans le cas axisymétrique, des stries de vitesse azimutale donnent naissance à des anneaux de vorticité à la périphérie du tourbillon. Pour des nombres d'onde azimutaux plus grands, un mécanisme de résonance a été identifié. Des nappes de vorticité de signe alterné enroulées dans la zone quasi-potentielle excitent les ondes de Kelvin via un processus mêlant le mécanisme de Orr et des effets d'induction. Dans le cas hélicoïdal, l'onde de déplacement émerge aux grandes longueurs d'onde fournissant ainsi une explication physique au "vortex meandering".

Références

- Antkowiak, A. & Brancher, P. 2004 Transient energy growth for the Lamb-Oseen vortex. *Phys. Fluids*. **16** L1-L4
- Antkowiak, A. & Brancher, P. 2007 On vortex rings around vortices : an optimal mechanism *J. Fluids Mech. (submitted)*
- Fabre, D., Sipp, D. & Jacquin, L. 2006 Kelvin waves and the singular modes of the Lamb-Oseen vortex *J. Fluid Mech.* **551** 235-274
- Farrell, B.F. & Ioannou, P.J. 1993 Stochastic forcing of the linearized Navier-Stokes equations *Phys. Fluids A* **5** 2600-2609
- Farrell, B.F. & Ioannou, P.J. 1994 Variance maintained by stochasting forcing of non-normal dynamical systems associated with linearly stable shear flows *Phys. Rev. Lett.* **72** 1188-1191
- Nolan, D.S. & Farrell, B.F. 1999 The intensification of two-dimensional swirling flows by stochastic asymmetric forcing *J. Atmos. Sci.* **56** 3937-3962
- Weideman, J.A.C. & Reddy, S.C. 2000 A MATLAB differentiation matrix suite *ACM Trans. Math. Soft.* **26** 465-519